数理解析研究所講究録
315巻 1977年 40-47

Poisson-Boltzmann 方程式系の解の存在定理

阪市大工　鵜飼正二

§1 序

天体力学及びプラズマ物理の基礎方程式である衝突のないBoltzmann方程式（標題の方程式系及びVlasov方程式）に対する初期値問題の（主として）大域解の存在について述べる。ここで大域解とは，時刻 $t=0$ で与えられた初期値から出発した解が途中（有限時刻）で跡切れることなく $t=+\infty$ 迄存在しつづけている解のことである。有限時刻で爆発（解自身又はその何階かの導関数等が無限大になること）するか，或いは有限時間の存在のみが証明される解を局所解と云う。解の存在定理を除くと，上記初期値問題の，漸近挙動その他の，解のさらに詳しい性質の数学的研究は未だないようである。

考える初期値問題は，$t\in[0,\infty)$ を時間変数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ を空間変数，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$ を速度変数として，

$$
(1.1)\begin{cases}
f_t + \xi\cdot\nabla_x f + \alpha\nabla_x\varphi\cdot\nabla_\xi f = 0 & , \quad (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \\
\Delta_x\varphi = \beta\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\,d\xi & , \quad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\
f|_{t=0} = f_0 & , \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \\
\nabla_x\varphi \to 0 \ (|x|\to\infty) & , \quad t\in[0,\infty).
\end{cases}
$$

ここで $f=f(t,x,\xi)$ は時刻 t に於ける, x-ξ 空間での質量密度, $\varphi=\varphi(t,x)$ は重力ポテンシャル, $f_0=f_0(x,\xi)$ は f の初期値(既知), α, $\beta\in\mathbb{R}^n$ は定数, ∇_x (∇_ξ) は x (ξ) に関する *gradient operator*, Δ_x は x に関する *laplacian*, $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ に於ける内積を表わす。

一次元 ($n=1$) の場合の大域解が Iordanskii [5] によって, $n=2$ の場合は [7] でその存在が示されている。いずれも古典解(§2の定義2.1参照)である。$n\geq 3$ に対しては, 一般の f_0 に対してはその古典的な大域解の存在は未解決の問題である。しかし古典的な局所解の存在が [1], [6] で示され, ある種の弱い解(古典的でない解, 定義3.1参照)が大域的に存在することが Arsen'ev [2] によって証明された。又最近 Batt [3] によって f_0 が球対称でかつ ξ に関して support compact ならば (i.e. 有界集合の外で 0 となる) 同じ性質を持つ古典的な大域解が存在することが示された。[3] 以外の結果は Vlasov 方程式に対しても成り立つが, [3] の証明を Vlasov 方程式にあてはめることは出来ない。以下 [2] と [7] の結果を紹介する。

§2 古典的な解

m 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の(開)集合 Ω 上で定義された l 回連続的微分可能な関数の全体を $C^l(\Omega)$, そのうち l 階迄のすべての導関数が Ω で有界なものの全体を $\mathcal{B}^l(\Omega)$, $\mathcal{B}^l(\Omega)$ に属し, l 階導関数が指数 $\sigma\in(0,1]$ の Hölder 連続性を持つ関数の全体を $\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)$, で表わす。$\mathcal{B}^l(\Omega)$, $\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)$ は次のノルムで Banach 空間である。

(2.1) $$\|u\|_{\mathcal{B}^l(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le l}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|,\quad \|u\|_{\mathcal{B}^{l+\sigma}(\Omega)}=\|u\|_{\mathcal{B}^l(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=l}\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\sigma},$$

$$D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_m^{\alpha_m},\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m),\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m .$$

$L^p(\Omega)$ は Ω 上で p 乗可積分関数(の同値類)の全体で, ノルムを

(2.2) $$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\int_\Omega|u(x)|^p dx,\qquad 1\le p<+\infty;\qquad \|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|,$$

とする Banach 空間である。

$T>0$ として $Q_T=[0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\Omega_T=[0,T)\times\mathbb{R}^n$ とおく。$C^{l_1,l_2}(\Omega_T)$ は Ω_T 上で t に関して l_1 回, $x\in\mathbb{R}^n$ に関して l_2 回連続的微分可能な関数 $\varphi(t,x)$ の全体, $\mathcal{B}^{\sigma_1,l+\sigma_2}(\Omega_T)$ は t に関して指数 σ_1 の Hölder 連続性を持ち, x に関する l 階導関数が指数 σ_2 の Hölder 連続性を持つ $\varphi=\varphi(t,x)\in C^{0,l}(\Omega_T)$ の全体, とする。

定義 2.1. 次の条件 (2.3) (2.4) を満す (f,φ) の組を (1.1) の古典的な解と呼ぶ。

(2.3) (i) $f=f(t,x,\xi)\in C^1(Q_T)$,

(ii) $f(t,x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)\quad(\forall(t,x)\in\Omega_T)$,

(iii) $\varphi=\varphi(t,x)\in C^{0,2}(\Omega_T)$.

(2.4)　(f,φ) は (1.1) を (t に関しては $[0,T)$) で満す。

ここで $T<+\infty$ ならば (f,φ) は局所解，$T=+\infty$ と取ればば大域解である。(2.3) により (1.1) の各項が通常の (古典的な) 意味で well-defined となり，(2.4) が意味を持つことになる。古典的な解の存在定理を述べよう。詳しくは [7] を参照。

定理 2.2.　$f_0=f_0(x,\xi)$ が次の条件を満すとする。

(2.5) (i)　$f_0\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$,

(ii)　$\exists\gamma>2n,\ \sup\limits_{x,\xi\in\mathbb{R}^n}|(1+|x|)^\gamma(1+|\xi|)^\gamma f_0(x,\xi)|<+\infty$.

この時，$n=2$ ならば (1.1) は古典的な大域解 ($T=+\infty$) を，$n\geq3$ ならば f_0 にのみ依存する定数 $T_0>0$ が存在して (1.1) は古典的な局所解 ($T=T_0$) を持ち，さらにこれらの解は次の性質を持つ。

(2.6) (i)　$f\in\mathcal{B}^\delta(Q_{T'})\cap L^\infty([0,T'];L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))\cap L^\infty([0,T'];L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))$,

$\varphi\in\mathcal{B}^{\delta_1,2+\delta_2}(\Omega_{T'})$,　$(\forall T'<T)$,

(ii)　$\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}=\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}$,　$(1\leq\forall p\leq+\infty,\ \forall t\in[0,T))$.

(iii)　$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|f(t,x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leq\rho(t)\equiv\begin{cases}ae^{bt}, & n=2,\\ \dfrac{a}{(T_0-t)^{\frac{1}{n-2}}}, & n\geq3.\end{cases}\quad(\forall t\in[0,T)).$$

ここで $\delta,\delta_1,\delta_2,a,b,T_0$ は f_0 のみに依存する正定数である。

注意 2.3.　$f_0(x,\xi)\geqq0$ ならば $f(t,x,\xi)\geqq0$ である。

注意 2.4.　$n\geq3$ の場合 (2.5) の下での大域的存在は未だ得られていないが，Poisson 方程式に次の修正を施せば，$n\geq3$ でも初期値問題 (1.1) の古典的な解が大域的に構成できる。詳しくは [2], [7] 参照;

(2.7) $\Delta_x \varphi = \beta \int_{|\xi| \le R} f(t, x, \xi)\, d\xi$, ($R>0$) , ([7]),

又は

(2.8) $-\varepsilon(-\Delta_x)^m \varphi + \Delta_x \varphi = \beta \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi)\, d\xi$, ($\varepsilon>0$, $2m-n>1$) ([2]).

ここで $R \to \infty$ 又は $\varepsilon \to 0$ とすれば元の(1.1)の解に(何らかの意味で)収束することが期待される(§3参照)。

定理2.2で得られた解の一意性については([7]),

定理 2.5. f_0 が (2.5) の他に,更に

(2.6) (i) $\nabla_x f_0, \nabla_\xi f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

(ii) $\sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^n} [1+|\xi|)^{\frac{\gamma}{2}} \{ |\nabla_x f_0| + |\nabla_\xi f_0| \} < +\infty$,

を満せば,次の条件を満す (f, φ) のクラスで,定理2.2で得られた解が唯一つの解である。

(2.7) (i) $f \in B^0(Q_T) \cap C^1(Q_T)$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\, d\xi \in B^\delta(\Omega_T) \cap B^\delta([0,T] ; L^1(\mathbb{R}^n_1))$,

(iii) $\nabla_x \varphi \in B^{0,1}(\Omega_T)$.

注意 2.6. 以上述べたことは,Vlasov方程式に対する初期値問題に対してもそのまま(自明の修正を除けば)成り立つ。

定理2.2の証明の概略を述べておく。有名なSchauderの不動点定理[4]を用いる。注意2.4の場合も同じである。

定理 2.7 (Schauder) Banach空間 X のコンパクト凸閉集合 S をそれ自身に写す連続写像 V は不動点 $u \in S$, $u = V[u]$, を持つ。

$g = g(t,x,\xi)$ が与えられたとして,(1.1)のpoissonの方程式を,その

右辺の f を g で置き代え第4式の条件の下で解き，得られた φ を用いて (1.1) の第1式を第3式の初期条件で解 f を求める。g を f に対応さす写像を V とし，$X = B^0(Q_T)$，S を次の条件を満す f の集合とする。

(2.8) (i) $f \in B^{\delta}(Q_T) \cap L^{\infty}([0,T]; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$,

(ii) $\|f\|_{B^{\delta}(Q_T)} \leq M_1$,

(iii) $\|(1+|x|)^{\frac{\gamma}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{B^0(Q_T)} \leq M_2$,

(iv) $\|f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \leq M_3$,

(v) $\sup_x \|f(t,x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \rho(t)$。

ここで δ, T, M_1, M_2, M_3 を f_0 に依存して適当に定め，この (X,S,V) が定理2.7の条件をすべて満すように出来る[ ]。

§3 弱い解

定義3.1. 次の条件(3.1)(3.2)を満す (f,φ) を (1.1) の弱い解と呼ぶ。

(3.1) (i) $f \in L^{\infty}([0,T]; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)) \cap L^{\infty}([0,T]; L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$,

(ii) $\nabla\varphi \in L^p(\Omega_T)$ $(1 \leq \exists p \leq +\infty)$,

(3.2) 任意の $\psi \in C_0^{\infty}(Q_T)$, $\chi \in C_0^{\infty}(\Omega_T)$ に対して,

(i) $\displaystyle\int_{Q_T} f(t,x,\xi)\{\psi_t + \xi\cdot\nabla_x\psi + \alpha\nabla_x\varphi\cdot\nabla_\xi\psi\}\,dt\,dx\,d\xi = -\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f_0(x,\xi)\psi(0,x,\xi)\,dx\,d\xi$,

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_T} \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\chi\,dt\,dx = -\beta\int_{Q_T} f(t,x,\xi)\chi(t,x)\,dt\,dx\,d\xi$

が成り立つ。 ここで $C_0^{\infty}(\Omega)$ は support compact な $\bigcap_{\ell=0}^{\infty} C^{\ell}(\Omega)$ に属す

関数の全体を表わす。

(f,φ) が (3.1) を満せば (3.2) は well-defined となっている。(3.2) は形式的には (1.1) の第一, 第二式に夫々 ψ, χ を乗じ部分積分によって得られたものである。

注意 3.2. 弱い解の定義は上のものが唯一ではない。

定義 3.1 の意味の弱い解の大域的存在について Arsen'ev の結果を述べよう。[2]。

定理 3.3. f_0 が (2.5) を満し, $\alpha/\beta<0$ ならば (1.1) は大域的な弱い解を持つ。

注意 3.4. [2] では (2.5) より強い条件が f_0 に課されている。

[2] では, Poisson 方程式を (2.8) で置き代えた (1.1) の古典的な大域解 $(f_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)$ で $\varepsilon\to0$ として定理 3.3 を得ている。即ち

定理 3.5. 定理 3.3 の条件の下で, $(f_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)$ は $\varepsilon\to0+$ の時次の意味で収束する。$T>0$, $p\in[1,\infty)$ を任意として,

(3.3) (i) $f_\varepsilon\to f$ weakly in $L^p(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ uniformly in $t\in[0,T]$,

(ii) $\nabla_x\varphi_\varepsilon\to\nabla_x\varphi$ strongly in $L^p(\Omega)$ uniformly in $t\in[0,T]$, ($\forall\Omega\subset\mathbb{R}^n_x$, 有界).

更に極限 (f,φ) は (1.1) の弱い解である。

注意 3.6. この証明からは定理 3.3 の弱い解の一意性は従わない。

参考文献

[1] Arsen'ev A.A., Local uniqueness and existence of a classical solutions of Vlasov's system of equations. Soviet Math. Dokl. 15, 1223-1225 (1974).

[2] Arsen'ev A. A., Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations. Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. 15, 136-147 (1975)

[3] Batt J., Global symmetric solutions of the initial value problem of steller dynamics, J. Diferential Equations, 25, 342-364 (1977)

[4] Courant, R. Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, Vol II, Interscience 1962.

[5] Iordanskii S. V., The Cauchy problem for the kinetic equation of plasma, Amer. Math. Soc. Transl, series 2, 35, 351-363 (1964).

[6] Kurth R., Das Anfangswertproblem der Stellerdynamik, Z. Astrophysik, 30 213-229 (1952).

[7] Ukai S. Okabe T., On classical solutions in the large in time of Two-dimensional Vlasov's equation, To appear on Osaka J. Math.